數學傳播 47卷4期, pp. 98-106

以數學模型論述太平盛世君臣之義

陳博彥

摘要: 歷史事件在社會科學中多以定性陳述紀事爲主, 然而既屬一門科學, 自有科學方式來進行定量轉譯論述。本文即首度嘗試針對古代君臣關係以生態數學原理 (Lotka-Volterra (L-V) 模型) 來轉譯推演其富含哲學意義之君臣倫理關係, 更於相平面分析演化趨勢上, 結論出「君臣同心」天下共治實爲全民共享太平之本源。然而在君權至上的年代裡, 君王若先天心有道德上之背負者, 卻反可成爲其積極努力成爲信任臣民且善待百姓成就明君之可能條件。反之, 君王猜忌多疑實可能是造成國力內耗之始作俑者。儘管臣子或有貳心, 但是模型指出, 君王持有「用人不疑, 疑人不用」之心來全權委任賢能治國者, 極可能是構成太平盛世之基本要件。古代君臣之義的道理, 換作現今世代而言, 亦可論及師生關係、勞資關係、朋友道義、血緣親情等關係上。其中道理皆可以 L-V 模型來予以表徵, 此文即是以此君臣之義的「歷史數學」作爲拋磚引玉之比較說明案例。

壹、引言

先前《以數學模型來詮釋「利他主義」的真諦》一文 [1], 就利他主義的核心價值—「道德本體應有幫助他人之義務」爲基本假設, 建立數學模型來進行量化分析。在此延續先前概念來廣義推論到歷史發生之事件上, 是否亦可如此用來進行評價量化分析。在此先設定一些假說以建立數學模型, 並修正 Lotka-Volterra (L-V) 競爭模型 [2-5] 來探討太平盛世君臣之間互動關係的歷史現象, 其模型可表爲以下之關係式 (1) 及 (2):

$$\frac{dN_1}{dt}=r_1N_1\Big(\frac{K_1-N_1-\alpha_{12}N_2}{K_1}\Big)=f(N_1,N_2),\tag{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt}=r_2N_2\Big(\frac{K_2-N_2-\alpha_{21}N_1}{K_2}\Big)=h(N_1,N_2),\tag{2}$$

其中 r_i 爲 i 方資源獲取速率 (specific resource encounter rate), α_{ij} 表 j 方對 i 方構成之相對資源競爭壓力 (或威脅) 係數 (competitive coefficient for resource)。K_i 設定爲 i 方在考慮的系統中可取得之最大資源 (maximal encounter capacity of resource)。假若古代君主擁有權限及資源設定爲 N_2, 於天下萬物皆以皇家爲尊主之朝堂上, 臣子其擁有權責及資源設爲

N_1。即便是姜太公《六韜》〈文師第一〉中曾有道:「天下非一人之天下, 乃天下人之天下也。同天下之利者則得天下, 擅天下之利者則失天下。」此種哲學式的定性陳述實頗令人尋味。但是爲能解說其中奧妙之交互作用關係, 以下針對此種社會科學現象對應量化轉譯成君臣模型及反應科學現實之機制來進行細部定義及推演、歸納。

貳、建構反應機構及對應之數學模型

舉凡具有物理或相關專業意義之數學模型, 其背後自當有反映出現實存在問題之反應機構來支持, 此點即是解決實際問題的基本動機及想定, 歷史事件亦應當此理來體現。基於此, 針對臣子 (N_1) 與君主 (N_2) 間互動關係, 再就臣與君雙方分別對應之執掌權柄擁有資源權力 (亦即 S_1 與 S_2) (注: 理論上, 君主之資源可大至寰宇天下, 小至萬民生物。資源 S_2 自然相對地遠大過於臣子自皇朝領受所賦予之權限資源 S_1), 依據基本假設來推論出如下之反應機構:

$$\text{(i)} \qquad N_1 + S_1 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} [N_1 - S_1]^* \overset{k_2}{\rightarrow} \alpha N_1,$$

$$\text{(ii)} \qquad N_1 + N_2 \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} [N_1 - N_2]^* \overset{k_4}{\rightarrow} \beta N_1 + N_2,$$

$$\text{(iii)} \qquad N_2 + S_2 \underset{k_{-5}}{\overset{k_5}{\rightleftharpoons}} [N_2 - S_2]^* \overset{k_6}{\rightarrow} \varphi N_2.$$

在此推導過程中, 預設想定狀態是 $\alpha > 1$, $\beta < 1$ 及 $\varphi > 1$, 亦即假設君臣皆是適得其所之稱職能才, 但是君主卻心恐有功高蓋主的臣子疑慮, 壓抑臣子難以全力施展。(例如: 年羹堯於擁立雍正帝上位, 亦曾平定青海叛亂有功, 而曾官至撫遠大將軍 ($\beta > 1$)。後因權傾一時, 而擁兵自重, 目無法紀, 爲雍正賜死 ($\beta = 0$)。) 其中方程式 (i) 表賢臣能吏有效依其職掌經營治理, 更可有效推廣其職掌業務 (亦即 $\alpha > 1$)。若是奸小爲官主事, 不安其職, 實爲亂政, 則國將式微 (亦即 $\alpha \ll 1$)。

方程式 (ii) 則表臣子與君主交互應對進退關係。若君主仁德, 善待賢能臣工, 則發揮權柄有效在位爲國主事, 事半功倍 (即 $\beta > 1$), 但若君主多疑善妒, 苛求臣子, 君王重罰卻輕賞, 臣下輕則招貶抑 (亦即 $\beta < 1$), 重則招致殺身之禍 (亦即 $\beta = 0$)。事實上, 此步驟實爲君臣關係中最重要之「速率決定步驟」。(實質上言, 操縱自主權大多源自於君主端, 臣子端由於所處地位與權限不平等對稱, 實處於極爲被動狀態。) 在最後 L-V 數學模型推演分析上看, 更會發現君臣之義之主導權柄, 猶在於隨時擁有生殺大權之至上皇權身上。

方程式 (iii) 則指出君主依據其權責治理之天下資源, 若知人善任, 各安其位, 發揮所長最大權能, 則可大大擴展其國力版圖 (例如: 蒙元成吉思汗曾建立橫跨歐亞之龐大帝國 ($\varphi \gg 1$))。相對地, 若不擅經營, 猶若「敗家子」爲君主掌理天朝國家, 則實非全民之福。更甚者, 內起奸佞權臣、外有敵國外患, 國局紛亂、兵凶戰危, 甚至亡國者, 則是 $\varphi \ll 1$, 甚至是 $\varphi \to 0$。

因此可就上述定義, 若針對雙方在「反應動力相」來建構出如下君臣互動之「反應速率」方

程式, 並假設滿足近似穩態 (Quasi-Steady State; QSS) 條件成立 (亦即幾乎可忽略高度激動緊張狀態 $[\cdots]^*$ 存在累積項; $\dfrac{d[\cdots]^*}{dt}\simeq 0$):

$$\text{(A-1)}\quad \frac{d[N_1-S_1]^*}{dt}=k_1N_1S_1-(k_{-1}+k_2)[N_1-S_1]^*\approx 0,$$

$$\text{(A-2)}\quad \frac{d[N_1-N_2]^*}{dt}=k_3N_1N_2-(k_{-3}+k_4)[N_1-N_2]^*\approx 0,$$

$$\text{(A-3)}\quad \frac{d[N_2-S_2]^*}{dt}=k_5N_2S_2-(k_{-5}+k_6)[N_2-S_2]^*\approx 0.$$

如此可推論出假想之「高度激動緊張狀態」$[\cdots]^*$ 存在項, 儘管此緊張狀態在事件發生當下片刻來看, 茲事體大, 但是對整個朝堂日理萬機諸事而言, 此項累積影響量亦自是甚微 (因爲正常情況, 只見雙方緊張狀態存在, 但甚快, 即可爲至上皇權所壓制定局)。因此可分別得出結果如下:

$$\text{(B-1)}\quad [N_1-S_1]^*=\frac{k_1N_1S_1}{k_{-1}+k_2},$$

$$\text{(B-2)}\quad [N_1-N_2]^*=\frac{k_3N_1N_2}{k_{-3}+k_4},$$

$$\text{(B-3)}\quad [N_2-S_2]^*=\frac{k_5N_2S_2}{k_{-5}+k_6}.$$

如此自反應方程式 (i) (ii) (iii), 可推得臣子方獲取資源速率方程式爲

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt}&=-k_1N_1S_1-(k_{-1}+\alpha k_2)[N_1-S_1]^*-k_3N_1N_2+(k_{-3}+\beta k_4)[N_1-N_2]^*\\&=\frac{(\alpha-1)k_1k_2N_1S_1}{k_{-1}+k_2}+\frac{(\beta-1)k_3k_4N_1N_2}{k_{-3}+k_4}.\end{aligned}$$

由於各臣工所管轄資源, 相對於己身可擁有資源而言, 實爲過量 (in excess)。因此可設定反應過程中, $S_1\approx S_{10}$ (即耗損甚微, 幾乎不變)。如此可得

$$\text{(C-1)}\quad \frac{dN_1}{dt}=\frac{(\alpha-1)k_1k_2N_1S_{10}}{k_{-1}+k_2}+\frac{(\beta-1)k_3k_4N_1N_2}{k_{-3}+k_4}=AN_1-BN_1N_2.$$

相類似邏輯, 亦可推得君主方獲取資源速率方程式可爲

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt}&=-k_3N_1N_2-(k_{-3}+k_4)[N_1-N_2]^*-k_5N_2S_2+(k_{-5}+\varphi k_6)[N_2-S_2]^*\\&=\frac{(\varphi-1)k_5k_6N_2S_2}{k_{-5}+k_6}.\end{aligned}$$

由於君王所治理管轄資源, 即便是擁有全天下, 相對於己身可實質掌控擁有有限資源而言, 實爲過量甚多。因此亦可設定反應過程中 $S_2\approx S_{20}$, 即耗損甚微, 幾乎可忽略不計。

$$\text{(C-2)}\quad \frac{dN_2}{dt}=\frac{(\varphi-1)k_5k_6N_2S_{20}}{k_{-5}+k_6}=CN_2.$$

若不考慮方程式 (1) 及 (2) 各方可取得之最大資源 K_i (亦即簡化爲 $K_1 \gg N_1$ 且 $K_2 \gg N_2$) 之前提下, 則可綜合由方程式 (1) 及 (2) 與上述方程式 (C-1) 及 (C-2) 來推論比較得到

$$\text{(D-1)} \quad \frac{dN_1}{dt} = \frac{(\alpha-1)k_1k_2S_{10}}{k_{-1}+k_2}N_1 + \frac{(\beta-1)k_3k_4}{k_{-3}+k_4}N_1N_2 = r_1N_1 - \frac{r_1\alpha_{12}}{K_1}N_1N_2 = AN_1 - BN_1N_2,$$

$$\text{(D-2)} \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{(\varphi-1)k_5k_6S_{20}}{k_{-5}+k_6}N_2 = r_2N_2 = CN_2.$$

由上述推演過程, 亦可看出生態學上兩物種關係 (像是競爭 (Competition)、互利共生 (Mutualism)、片利共生 (Commensalism) 或是其他), 皆可由動力學參數 α, β 或是 φ 之調整來得到。同理在朝堂上君臣關係之呈現亦可如此做數量大小, 甚至於是正負號調整, 來確實反應實際發生狀況, 以進行量化評估。

參、相平面穩定點分析評估

針對臣子面對君權至上的主子關係, 儘管支配大多落於君主之主動權上, 臣子相對較爲被動, 但是仍可以相平面分析 (phase-plane analysis) 方式 [6] 來進行解析預測長程演化互動關係之可能演變結局。就如同先前以此分析方法來解析「新冠清零」或是「與疫共存」[7] 一般。事實上, 在天子至上之天下前, 並不存在壓迫君主家族「產業」的臣子競爭壓力存在下(亦即假設臣子會對君主具有取代或是弒君能力者, 在此不予考慮), 因此幾乎可假設 α_{21} 趨近於零, 進而可改寫簡化上述 L-V 方程式成爲如下二微分方程式:

$$\text{臣子方:} \quad \frac{dN_1}{dt} = r_1N_1\Big(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12}N_2}{K_1}\Big) = f(N_1, N_2), \tag{1}$$

$$\text{君主方:} \quad \frac{dN_2}{dt} \simeq r_2N_2\Big(\frac{K_2 - N_2}{K_2}\Big) = g(N_1, N_2), \tag{3}$$

(注: 若 (1) 及 (3) 引入 $K_1 \gg N_1$ 且 $K_2 \gg N_2$ 之條件, 即可得到 (D-1) 及 (D-2))。此君臣互動模型在生態數學上來看, 可對應歸類爲「偏害共存」(Amensalism/Antagonism) 系統 $(-, 0)$。前文 [1] 已將針對滿足方程式 (1) 及 (3) 式皆爲零之 4 個平衡點 (equilibrium points) 分別求出, 並表爲穩態 (steady states) $SS_1(0,0)$, $SS_2(K_1,0)$, $SS_3(0,K_2)$, $SS_4(K_1 - \alpha_{12}K_2, K_2)$ 決定出來, 可將針對其中由兩方程式 $K_1 - N_1 - \alpha_{12}N_2 = 0$ 及 $K_2 - N_2 = 0$ 同時聯立得到之平衡點 SS_4 (在此設定爲君臣共治互利共存共享之平衡點) 以及 $SS_3(0,K_2)$ (此設定爲君主獨佔中央攬權的平衡點)。$SS_1(0,0)$, $SS_2(K_1,0)$, 由於並非實際穩定存在之平衡點, 在此不予列入進行分析考量。首先對所討論之歷史事件來進行定義, 中國歷史中所謂之「君臣共治」代表的是君上將其權柄、利益、資源分配權釋放於賢臣能吏, 使其發揮所長, 盡其才能地來營運治理全民福祉之天下。相對地, 所謂:「君主集權」, 在天子至上之君權年代下, 設定爲獨佔擁有天下權柄、利益、資源盡皆爲天子皇家所有, 臣民所得盡皆「皇恩」賜予。在認知上更

假設, 主上即使賢能, 亦能力有限及分身乏術, 更無以單獨面面俱到, 日理萬機, 操盤全局。君主中央集權, 甚至至高無上君權, 極可能失能, 而後滋生弊端。此部分是否有理論模型基礎可以依循推論? 在此以數學建模系統方程組 (1) (3) 來分析之。再將此君臣關係以相平面圖解法來做細部分析如下:

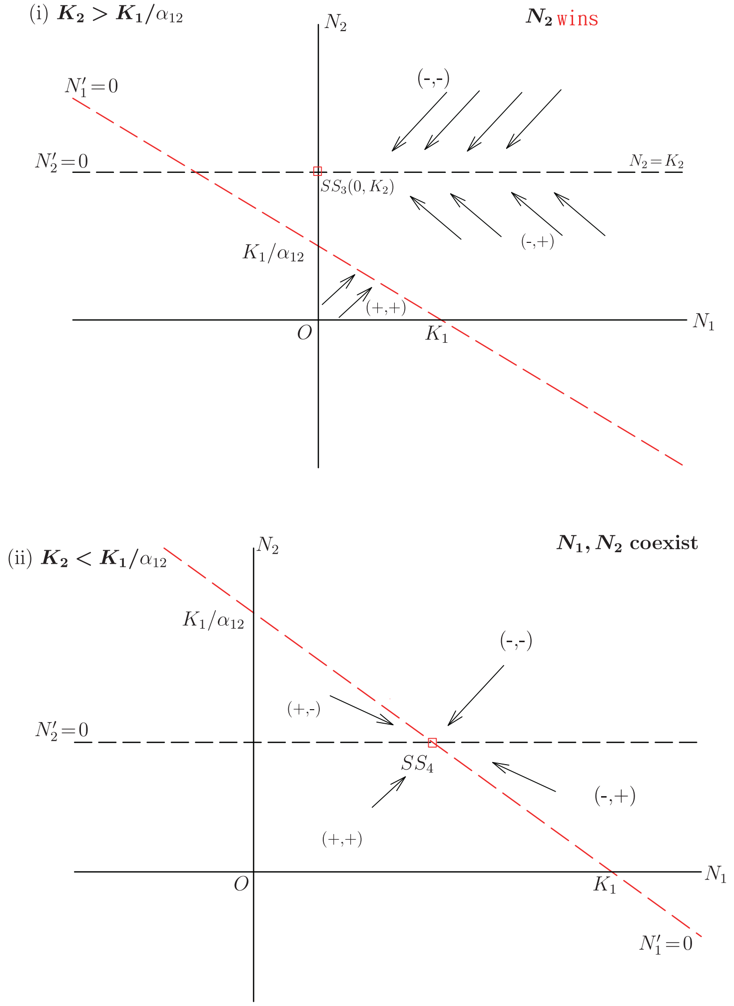

圖1: 臣子 (N_1) 及君主 (N_2) 交互作用關係之相平面分析圖, 其中 (i) 當 $K_2 > K_1/\alpha_{12}$ 時, 君主獨霸專權的最終演化結局 $SS_3(0, K_2)$, 天下所有權柄資源盡皆君主獨佔中央集權、君主極權, 臣子已然無以制衡匹敵 (N_2 wins)。(ii) 當 $K_2 < K_1/\alpha_{12}$ 時, 則君臣共治的最終演化結局 SS_4 $(K_1 - \alpha_{12}K_2, K_2)$ (N_1, N_2 coexist), 亦即君臣共治太平盛世提供有利的契機,「用人不疑, 疑人不用。」君主釋放出其至高無上的權限、資源分享於臣民, 來營造出達到賢臣能吏爲國治理效力的先決條件。圖中箭頭所指爲君臣相對資源權力互動向量時間動態趨勢走向。君臣關係圖上, 其實可看出臣子資源權力獲取 (紅色虛線) 的主控權全然取決於君主如何對待與君主共事的臣子 (亦即君王明智地對 K_1 進行調高及 α_{12} 調低)。

肆、歷史數學分析

整體而言, 君臣共治抑或是君主極權之尺規, 實質上決定在於君主端是否主動將權限做合情合理之最佳化釋放, 以達到最大效能之有效發揮 (在此想定為「太平盛世」)。此點在後續數學分析論述中皆可淸晰看出, 一個具有領導統御且位高權重之主子, 是否願意誠心延攬能者在其位, 發揮其最大效能, 而非酬庸式的資源權力分配, 在一有爲而治之國家治理上, 極其重要。主上針對臣子, 君權資源之釋放及權限壓力上鬆綁 (亦即 K_2, α_{12} 之適時合理之調降)。若臣子遇到知人善任之明主, 自是肝腦塗地鞠躬盡瘁, 但是其先決條件是君主不生猜疑, 全然信任臣子, 且委以重任, 方得以形成協同加強合作之互動作用關係, 來營造成就建立太平盛世最大可能機會及客觀條件。

在此引歷史上極爲極端且突出之唐太宗及明成祖爲案例, 由於登上帝王位時, 並非正統上位, 分別已然背負道德上之「原罪」瑕疵 —「殺兄弒弟」及「不認子侄」之良心罪責, 在儒家道統薰陶之社會氛圍裡, 自然在良心上形成揮之不去的枷鎖。(注:《貞觀政要》記載, 李世民於貞觀年間數次欲查考《起居注》, 爲褚遂良所拒, 後房玄齡等爲此加以刪減《高祖》《今上實錄》所載。此事爲後世學者指責。但不論如何來看, 皆可見太宗一生心中糾結道德缺失之執念, 始終揮之不去。事實上, 就心理層次來看, 具高敏感度「罪惡感」之君王, 自是更加戒愼恐懼, 謹愼行事, 時時刻刻鞭策提醒自己, 愼選人才爲國所用, 盡可能彌補一生糾結難去的過錯, 以圖「贖罪」。) 往昔一往常態的君主極權或是中央集權, 已然成爲心中永難落實的不可能。即使心有君權無限擴張之幻想, 迫於道德力量之約束與良心上之責備, 亦會選擇必須且必要地有效釋出其權柄、利益、資源於臣子分享共事, 亦即 K_2 會自然主動向下調整 (注: K_2 向下些微調整, 即足以使臣子資源權柄 K_1 頗爲放大的提升,「如虎添翼」。), 釋出提供給臣子來有效提高其 K_1 資源及權力, 以避免君主本身若其君權一味伸張所造成的無形道德壓力及良心指責。相對地, 就更必須愼選能臣, 放心大膽地讓所器重之臣子, 盡其所能來輔佐君上, 協同互動地報效朝廷, 以造福天下。亦即同時將君主限制臣子的阻礙效應 α_{12} 值更有效地向下調整。事實上, 此事之所以始終如一地成爲一種不變博弈法則, 就在於最後的底線評量上, 須知君主自知得位並非普天下共識之正統傳承, 即使是釋出其君權於臣子最大的輸盤, 亦只是「天下盡失」。此時對最大輸盤之「一切歸零」來看, 亦只是回到原點 —「天下本來就並非自己在原本正統道德規範下, 所共識當可擁有者」, 亦即最大輸盤亦回歸到無所損失般的自然而已。如此一生背負包袱之君主真是「天將降大任於斯“主”也, 必先苦其心志···」, 才能締造出椿椿歷史上極富盛名的史話, 像是原本事主於李建成, 卻於玄武門之變後, 未受株連殺害, 反而倍受重用, 還膽敢不諱直諫唐太宗兩百餘次的魏徵。更有貞觀十七年閻立本繪「凌烟閣二十四功臣」畫像, 以爲太宗時時緬懷感念名臣之歷來卓越功勳。再者, 朱棣臣工大學士解縉編修收錄各種學科的文獻資料《永樂大典》, 更是不計血本, 重用七下西洋造訪二十餘國之三保太監鄭和, 北征蒙古 (五度親征漠北), 南平安南, 以宣揚更勝洪武之大明國威。反觀, 若是得位不正, 還欲一如往昔歷代君主施行其常見之專

權, 屆時不論如何, 史書上極可能只能落得一立位不正君主下場而遺臭萬年。所以可以推論或許在君主一生中心中揮之不去的執念包袱:「立位不正」, 時時鞭策驅動自己要盡其所能去洗雪那儒家傳統道德上「全民公敵之罪過」, 才一再「叮嚀」君王需時刻警醒, 務必設法 K_2 及 α_{12} 下調, 甚至幾乎毫無底線的下修 (是以才有史上「以人 (魏徵) 爲鏡, 可以明得失」之千古美談) 來洗刷正名, 再加上此時君主會更用雪亮眼睛來選賢與能, 以交託釋出其權柄於賢臣能吏, 讓他們放手盡力爲朝廷及自己做事, 而賜予他們擁有更多資源權力, 亦即有效提高 K_1, 如此君臣關係更加速被催化走向圖 1 (ii) 如此君臣共治成就德政盛世之機會之先決條件就大大提高 (亦即充分地滿足 $K_2\alpha_{12} \ll K_1$ 君臣共榮共治的必要條件), 而發生圖 1 (i) $K_2\alpha_{12} \gg K_1$ 之發生之必要條件, 此時君主古代道德共識本有之專制皇權, 讓臣子權力永遠無法制衡匹敵, 最終演變爲君主獨裁專制極權之結果。事實上, 此種條件之存在或許該說是人的貪婪「本性」使然, 才在大多數歷史演進場景中屢屢發生。上述推論或許可以如此說, 其實像貞觀之治及永樂盛世如此的太平盛世之存在, 極可能有其君權難以無限擴張之先天抑制限制條件存在, 絕非偶然。在社會學、心理學及數學分析上來看, 實源自於自始即「立位不正」衍生出來的道德牽絆, 才能自我克制其貪欲執念, 時時警醒自己務必撥反爲正的擇善固執。自圖 1 (i) 及 (ii) 相互比較, 亦可看出在歷史中君主專權或是臣下亂政、外戚干政極有可能都是處於君主獨霸專權、君上用人非才、權力無法釋懷、心生猜疑等等所衍生結果。事實上此點, 更可以反映歸納出不少存在事實, 歷史中一再出現「狡兎死, 走狗烹。飛鳥盡, 良弓藏。敵國破, 謀臣亡。」「木秀於林, 風必摧之。功高蓋主, 禍必將至。」的場景, 各種「不可共富貴」而誅殺功臣能士勇將的事件一再反覆出現於歷史舞台上, 像是劉邦呂后, 誅殺功臣以立威來鞏固權勢。又有朱元璋以「洪武四大案」來消滅威脅朝廷之官吏, 最最可惜的可能疑案 — 心存猜疑的思宗崇禎賜死袁崇煥, 是否是大明走向敗亡之最後一根稻草等等。或許該說「陳橋兵變、黃袍加身」之宋太祖爲達到中央集權, 以威脅利誘方式而「杯酒釋兵權」實是歷史上不行誅殺的一種「仁政」體現。前述種種歸咎其中原因就在於君主不願無怨無悔地釋出專有且至高無上的權柄利益讓於賢臣能吏, 使 $K_2\alpha_{12} < K_1$ 先決且必要之條件時時成爲可能, 來細水長流般地營造提供成就出君臣共治、爲天下臣民造福的太平社會的可能氛圍。儘管「天下非一人之天下, 乃天下人之天下也」, 但是可以自圖 1 清晰看出, 主宰天下者卻有可能因爲一個始終釋放不下君權執念的主子, 獨攬天下不放而盡失民心, 而且是確確實實地失去「天下人的天下」, 這或許可能用來解釋何以在歷史洪流中, 一再出現朝代興起、覆滅的可能成因之一。或許亦可間接說明歷史中, 注重禮制謹守分寸之周朝可有八百餘年的國運的原因。還有一點值得一提的是, 君王即使全然釋出權力於賢能來治理國家, 自圖 1 (i) (ii) 比較可看出, 君主方最終演化結局亦是仍能回歸保有其原有最大權力資源 K_2。(注: 君主釋出其相當豐富權柄資源 K_2 之微量部分 (對君主而言, 實猶如九牛一毛般些微) 於臣子權力資源, 即可充填其權力資源 K_1 之顯著提升治理效能, 造福天下黎民百姓)。這有得有捨之間, 實際上君主最終亦毫無所失 (君主權力資源 K_2, 依然是 K_2), 唯一差別在於釋出其獨有之至上君權的結

果, 卻可換來「君臣共治、天下共享」最大的整體全贏賽局利益實現 (臣子端是 $K_1 - \alpha_{12}K_2$, 而非 0)。若幾乎毫無阻攔般全然放手, 來讓適任賢能臣子安其位、理其事來治理國政, 其臣子最大利益更可趨近於最大化之 K_1 (亦即是 $\lim_{\alpha_{12}\to 0}(K_1 - \alpha_{12}K_2) = K_1$)。事實上, 此時君臣間的合作博弈均衡最大值就是雙贏賽局 $SS_\infty(K_1, K_2)$, 社會生態學上來看, 亦即是兩不相干預之君臣關係, 可得到之最大極限治理效能。就生態數學觀點來看, 亦即此時之君臣關係由起始「偏害共存」(Amensalism/Antagonism; $(-,0)$) 轉爲「無關共存」(Neutralism; $(0,0)$)。現今君主立憲制度實似有如此之精神存在。各司其職, 各安其位。不在其位, 不謀其政。或許說李世民與魏徵之間體現的君臣之義即是此最大極限治國效能之典範表徵 $SS_\infty(K_1, K_2)$, 亦該說是中國歷史中, 更或許可以說是古今中外最崇高美談且未曾爲聯合國列入典藏之「世界非物質文化遺產」(或說是「無形文化財」)。若能看淸悟到此點, 或許「可共患難, 不可共富貴」的君主, 就不會一再於歷史舞台上出現。這或許亦要說人本就是存有貪求本性執念存在, 知易行難。但是在「君權天授」的歲月中, 君主其實主導著國家朝代之興衰關鍵, 就在於其是否願意放下身段, 不存猜疑地委用授權適任賢能來治理朝政。君主若時常懷疑臣子存有「功高蓋主」的猜忌心態, 其實相當不利彼此恪守君臣義理分寸, 來發揮國家治理上之最大效能, 以體現天下太平的理念。誠如「陶朱公」范蠡因心中早有盤算 (數學模型? 或是其他?), 深知越王句踐實乃「可與共患難, 不可與同安樂」之主子, 曾勸文種早早離開, 卻不聽, 終至「鳥盡弓藏」而死。綜合以上, 其實針對此種佔有慾甚重的主子, 在無資源條件下, 自然需要賢能爲己共事, 來對外開疆闢土, 爭取資源。(此時系統方程組 (1) 及 (3) 中之 N_1, N_2 分別代表的是共同對外爭取的利益資源及自身資源利益), 此時自然是「刀口一致對外」, 君臣彼此上下同心同德爲對外爭取資源的共同集團。但是一旦立國後, 君主轉念視所有所得盡皆「自己一人所有的天下」, 絕不容他人與己爭奪權力資源 (亦即此文中所論述之臣、君兩方), 方產生矛盾的君臣關係。此現象之差異皆因面對 L-V 模型所設立之資源及對象不同所致。多疑君王所以會誅殺功臣之原罪, 實質上是天子以「家天下」概念來具體體現的不仁結果。君臣之義最大的關鍵決定者實質上是君主是否有心來釋出其權柄利益, 取得發揮國家機器之最大效能及開創天下黎民最大福祉之有利條件。在本文中, 此數學模型確實可以具體結論此中哲理奧秘。

伍、結論

就生態數學原理來判讀,「君臣關係」自始應歸類爲「偏害共存」(Amensalism / Antagonism) 系統, 欲達到幾乎理想之太平盛世狀態, 所演變表徵出來的君臣互動關係, 會更趨於轉爲「無關共存」(Neutralism) 作用關係, 亦即達到「各安其位, 各理其事, 互不干涉」的狀態, 君王無疑地釋出其權責於適任臣吏時, 即讓臣工能放心去做, 且不應另加阻攔。換言之, 在君臣之義上, 君王若要扮演太平盛世之主角推手, 即需「無所爲而治」, 且用人不疑地讓賢臣能吏更「大有所爲而理」, 如此方足以具備太平盛世最大可能發生機會之先備條件。

誌謝

感謝教育部教學實踐研究計畫 (PEE1110081)《以數學建模結合工程倫理以鷹架融入化工專業課程問題導向學習之可行性研究》及科技部計畫 (MOST 109-2221-E-197-016-MY3 以及 NSTC 112-2221-E-197-004-MY3) 之經費補助, 更感謝藉由此計畫執行過程中能得力於國立宜蘭大學教學發展中心的夥伴們持續協助及 112 年「教學品質躍進計畫 — 永續發展目標取向數學建模以融入化工專業課程問題導向學習之可行性先導研究」(編號: TQEP2023A-IT14) 支持鼓勵, 以及校方教師社群計畫支助 (112 年國立宜蘭大學教學實踐研究計畫東部區域基地 [東區跨校社群] 社群編號 11203) 協助能聯結跨校與人文社會科學專業教授們 (玄奘大學社會工作學系王敏菱、台北教育大學心理諮商學系陳柏霖、玄奘大學藝術設計學院王振邦等位教授) 有腦力激盪實質交流, 方有如此歷史數學的教學實踐研究進行。再者, 部分歷史事件之陳述, 實援引自維基百科, 由於出處過多, 不再另行引注參考文獻, 特此說明以爲標記。本文受到 YABEC 國際會議中 BioFun 之激勵啟發, 方才有斜槓跨領域之 MathFun 之行考探索。最後但卻最重要的是將此文獻給在天上的筆者指導教授台大化工系黃世佑教授以及加州大學爾灣分校的 Professor Henry C. Lim, 以及獻給過往一再提攜筆者的師長, 在天上的院長 — 台大化工系徐治平教授。因爲師長們的教導一再指引著「所有數學模型之呈現背後, 皆有以科學真理、真相及事實來相互對應體現之反應機制存在。」更啟蒙出「歷史數學」的研究課題融入問題導向學習 (PBL) 之產生。

參考文獻

1. 陳博彥。以數學模型來詮釋「利他主義」的真諦。數學傳播季刊, 46(1), 64-68, 2022。
2. B. Y. Chen, Revealing characteristics of mixed consortia for azo dye decolorization: Lotka - Volterra model and game theory, *Journal of Hazardous Materials*, 149, 508-514, 2007.
3. N. J. Gotelli, Chapter 5 Competition, In: *A Primer of Ecology*, Sinauer Association Inc., Sunderland, MA, USA, pp. 111-138, 1995.
4. P. J. Morin, Chapter 10 Competition: mechanisms, models, and niches, In: *Community Ecology*, Blackwell Science Inc., Malden, MA, USA, pp. 29-66, 1999.
5. G. F. Gause, *Competitive Exclusion Principle*, Science 131, 1292-1297, 1960.
6. E. Kreyszig, Sect. 4.5 Qualitative Methods for Nonlinear Systems in Chapt. 4 Systems of ODEs, *Phase Plane. Qualitative Methods.* 10th Ed. Advanced Engineering Mathematics. Abridged International Student Edition.
7. 陳博彥。數學模型論新冠清零及「與疫共存」之兩難困境。數學傳播季刊, 46(2), 49-56, 2022。

—本文作者陳博彥任教於國立宜蘭大學化學工程與材料工程學系—

勘誤表 (1)

第 43 卷第 1 期 (169號), 2 頁 Line -1 和 89 頁。

作者姓名「鐘文體」應爲「鍾文體」。

第 44 卷第 2 期 (174號), 86 頁, Line 2。

代入 $(M3)$ 則不行號反向。

應爲：

代入 $(M3)$ 則不等號反向。

第 44 卷第 4 期 (176號), 63 頁, Line 10。

$= |\{(1,k),(2,k),\ldots,(k,k)\}| + |\{(k,1),(k,2),\ldots,(k,k-11)\}|$

應爲：

$= |\{(1,k),(2,k),\ldots,(k,k)\}| + |\{(k,1),(k,2),\ldots,(k,k-1)\}|$

第 47 卷第 2 期 (186號), 4 頁, Line -8。

然後他說:「不, 不」。它的工作 ...

應爲：

然後他說:「不, 不」。他的工作 ...

第 47 卷第 2 期 (186號), 65 頁, Line -2。

則兩直線焦點 A 點的移動軌跡爲等角差線 ...

應爲：

則兩直線交點 A 點的移動軌跡爲等角差線 ...

第 47 卷第 2 期 (186號), 67 頁, Line -6。

則兩直線焦點 A 點的移動軌跡爲等角差線 ...

應爲：

則兩直線交點 A 點的移動軌跡爲等角差線 ...

勘誤表 (2)

第 47 卷第 3 期 (187號), 12 頁, Line 1。

在古希臘, 數學 Máthéma 原意是學術的意思, 非若後世專指數學。$\cdots$

應爲：

在古希臘, 數學 máthēma 原意是學術的意思, 非若後世專指數學。$\cdots$

第 47 卷第 3 期 (187號), 14 頁, Line 14。

北馬其頓國 Northen Macedonia, 它是後世的斯拉夫人之國, $\cdots$

應爲：

北馬其頓國 North Macedonia, 它是後世的斯拉夫人之國, $\cdots$

第 47 卷第 3 期 (187號), 28 頁, Line 9。

清代乾隆朝設立四庫全書館, 整理古籍。$\cdots$

應爲：

清代乾隆朝設立四庫全書館, 整理古籍。$\cdots$

第 47 卷第 3 期 (187號), 36 頁, 附註1。

[1]根據有記載的文獻, 春秋戰國時代的《墨經》中記載了最早的小孔成像實驗:景, 光之人, 煦若射, 下者之人也高; 高者之人也下, 足蔽下光, 故成景於上, 首蔽上光, 故成景於下。」$\cdots$

應爲：

[1]根據有記載的文獻, 春秋戰國時代的《墨經》中記載了最早的小孔成像實驗:「景, 光之人, 煦若射, 下者之人也高; 高者之人也下, 足蔽下光, 故成景於上, 首蔽上光, 故成景於下。」$\cdots$

第 47 卷第 3 期 (187號), 48 頁。

第 7 節的子標題, 以及第 7 節內使用的式子編號, 都改爲第 6 節。